OSNOVNE OSOBINE SKUPA REALNIH BROJEVA I NJEGOVIH PODSKUPOVA

1. Struktura $(R, +, \cdot)$ je polje, tj.:

1.1. $(R, +)$ je Abelova grupa;

1.2. $(R\setminus\{0\}, \cdot)$ je Abelova grupa gdje je 0 neutralni elemenat u odnosu na operaciju sabiranja;

1.3. vrijedi distributivnost $(\forall x, y, z\in R)\, x(y+z)=xy+xz$.

2. U skupu R definisana je binarna relacija $\leqq (\subset R^2)$, za koju vrijedi:

2.1. $\leqq$ je relacija totalnog poretka;

2.2. $x\leqq y \Rightarrow x+z\leqq y+z$ za svako $z\in R$;

2.3. $0\leqq x,\ 0\leqq y \Rightarrow 0\leqq x\cdot y$.

3. Neka je $R\supset A\neq\emptyset$. Kaže se da je A *ograničen odozgo* (*odozdo*) ako postoji $M\in R$ (tj. $m\in R$) takav da je $x\leqq M$ $(m\leqq x)$ za svako $x\in A$. Pri tome se M (tj. m) naziva *majoranta*, (*minoranta*) skupa A. Skup je *ograničen* ako je ograničen i odozgo i odzdo.

4. Ako u skupu svih majoranti (minoranti) skupa A postoji najmanji (najveći) elemenat, on se naziva *supremum* (*infimum*) skupa A i označava $\sup A$ $(\inf A)$. Ako je još $\sup A=a\in A$ $(\inf A=b\in A)$, onda je a maksimum (b minimum) skupa A i pišemo $a=\max A$ $(b=\min A)$.

5. Svaki neprazan odozgo ograničen podskup skupa realnih brojeva ima supremum u R (aksiom supremuma).

6. Skup realnih brojeva R potpuno je okarakterisan sa 1, 2. i 5. tj. skup realnih brojeva je totalno uređeno polje na kome vrijedi aksiom supremuma. Ostala svojstva realnih brojeva mogu se izvesti iz ovih svojstava.

7. U skupu racionalnih brojeva $Q=\left\{\frac{p}{q}\,\middle|\, p\in Z,\ q\in N\right\}$ vrijede sve osobine 1. i 2, ali ne vrijedi princip supremuma.

8. *Apsolutna vrijednost realnog broja je preslikavanje* $|\,|:R\to R_0^+$ koje je definisano formulom:

$$|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

Važe slijedeće relacije:

(*i*) $|-x|=|x|$;

(*ii*) $|xy|=|x|\,|y|$;

(*iii*) $|x+y|\leqq|x|+|y|$;

(*iv*) $\big||x|-|y|\big|\leqq|x-y|$;

(*v*) $(\forall a>0)\,|x|\leqq a \Leftrightarrow -a\leqq x\leqq a$;

(*vi*) $(\forall a>0)\,|x|>a \Leftrightarrow x>a \vee x<-a$.

9. Neki jednostavni podskupovi u R.

Neka je $a, b\in R$, $a<b$, tada uvodimo slijedeće oznake:

$(a, b)=\{x|a<x<b\}=I$;

$[a, b]=\{x|a\leqq x\leqq b\}=\bar{I}$;

$(a, b]=[a, b]\setminus\{a\}=(a, b)\cup\{b\}$;

$[a, b)=[a, b]\setminus\{b\}=(a, b)\cup\{a\}$.

Skup $\bar{I}$ se naziva *zatvoreni interval* ili *segment*, a I se naziva *otvoreni interval* ili samo *interval*.

Pored toga, koriste se i slijedeći *neograničeni intervali*:

$[a, \infty)=\{x|x\geqq a\}$, $(a, \infty)=\{x|x>a\}$,

$(-\infty, b]=\{x|x\leqq b\}$, $(-\infty, b)=\{x|x<b\}$,

$(-\infty, +\infty)=R$.

10. ε – okolina broja $a\in R$ je interval $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, gdje je $\varepsilon>0$.

11. Neka je $A\subset R$ i neka je $M=\sup A$, tada

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists a\in A)\, a>M-\varepsilon.$$

(Slijedi neposredno iz aksioma supremuma.)

12. Neki važniji podskupovi skupa R:

12.1. Skup prirodnih brojeva:

$N=\{1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots\}$,

$N_0=N\cup\{0\}$.

12.2. Skup cijelih brojeva:

$Z=N^-\cup N_0$,

gdje je $N^-=\{x|(\exists n\in N)\, x+n=0 \Leftrightarrow x=-n\}$.

12.3. Skup racionalnih brojeva Q.

12.4. Skup pozitivnih realnih brojeva $R^+=\{x\in R|x>0\}$, skup nenegativnih realnih brojeva $R_0^+=R^+\cup\{0\}$.

12.5. Skup iracionalnih brojeva

$I=R\setminus Q=\left\{x\in R\,\middle|\,(\forall p\in Z)(\forall q\in N)\, x\neq\frac{p}{q}\right\}$.

13. Vrijedi niz inkluzija:

$N\subset N_0\subset Z\subset Q\subset R=I\cup Q$.

14. Princip matematičke indukcije formulišemo na slijedeći način:

$((\forall n\in N)\, P(n)) \Leftarrow (P(1)\wedge(\forall n\in N)\, P(n)\Rightarrow P(n+1))$,

tj. iskaz $P(n)$ tačan je za sve prirodne brojeve n ako je tačno $P(1)$ i ako za svakoo $n\geqq 1$ vrijedi implikacija $P(n)\Rightarrow P(n+1)$.

15. Bernulijeva nejednakost:

$(\forall h>-1,\ h\neq 0)(\forall n\in N\setminus\{1\})\,(1+h)^n>1+nh$,

za $h=0$ *ili za* $n=1$ vrijedi znak $=$.

16. Binomna formula:

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k,$$

gdje je $n\in N_0$ i *binomni koeficijent* „n nad k“ je

$$\binom{n}{k}=\begin{cases}1, & k=0\\ \dfrac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}, & k\leqslant n\\ 0, & k>n.\end{cases}$$

17. Vrijede slijedeće osobine binomnih koeficijenata:

$$(i)\quad \binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!};$$

$$(ii)\quad \binom{n}{k}=\binom{n}{n-k};$$

$$(iii)\quad \binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1},$$

za sve $(n, k)\in N_0^2$.

Posljednja formula zove se zakon Pascalovog* trougla i daje mogućnost brzog izračunavanja binomnih koeficijenata, što je za $n\leqq 4$ prikazano u tabeli:

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	$(a+b)^n=$
0	1	0	0	0	0	0	$=1$
1	1	1	0	0	0	0	$=a+b$
2	1	2	1	0	0	0	$=a^2+2ab+b^2$
3	1	3	3	1	0	0	$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
4	1	4	6	4	1	0	$=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$.

* Blaise Pascal (1623–1662), francuski matematičar, fizičar i filozof.

ZADACI

1. Neka je $A=\left[\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right)\cap Q$. Odrediti skup svih majoranti $\overline{A}$ i skup svih minoranti $\underline{A}$ skupa A; $\inf A$, $\sup A$, $\max A$, $\min A$ u skupu Q. (Isto pitanje u skupu R.)

2. Dokazati implikaciju:

$(\forall x, y\in R)\, x^3+y^3=0\Rightarrow x+y=0.$

3. Dokazati da je:

a) $\sqrt{2}$ iracionalan broj; b) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ iracionalan broj; c) $3\sqrt{2}$ ili $2+\sqrt{2}$ iracionalan broj.

Da li su brojevi iz a), b) ili c) algebarski?

4. Dokazati da je svaki beskonačan periodičan decimalni broj racionalan broj.

Slijedeće decimalne brojeve napisati u obliku $\frac{p}{q}$:

a) $4,\overline{31}$, b) $23,\overline{32}$, c) $1,98\overline{14}$.

5. Riješiti jednačinu:

a) $|x+1|-|2x-3|=2$; b) $|x+2|-|2x-1|=2$;

c) $|x^2-4x+3|-|x-2|=x-1$.

6. Riješiti nejednačinu:

a) $\big||x+2|-1\big|\leqq 1$; b) $|x^2-2x-1|\leqq 2$; c) $|x^2-x|-|x|<1$.

7. a) Pokazati da je ε – okolina tačke a

$\cup_\varepsilon(a)=\{x\,|\,|x-a|<\varepsilon\}=\{x\,|\,a-\varepsilon<x<a+\varepsilon\}$ za svako $\varepsilon>0$.

b) Napisati slijedeće dvojne nejednakosti u obliku jedne nejednakosti s apsolutnom vrijednošću:

1° $a<x<b$; 2° $x\notin(a, b)$; 3° $-1\leqslant x\leqslant 0$.

c) Pokazati da je $\cup_\varepsilon(a)\setminus\{a\}=\{x\,|\,0<|x-a|<\varepsilon\}$.

8. Dokazati jednakosti:

a) $\max(a, b)=\frac{1}{2}(a+b+|b-a|)$; b) $\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2+\left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2=x^2$.

$\min(a, b)=\frac{1}{2}(a+b-|b-a|)$;

9. Matematičkom indukcijom dokazati jednakost (obrazac za zbir n članova geometrijske progresije).

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}aq^{k-1}=a\frac{1-q^n}{1-q}\quad (q\neq 1,\ n\in N).$$

10. Dokazati identitete:

a) $\sum_{k=1}^{n} k=\frac{1}{2}n(n+1)$; b) $\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$;

c) $\sum_{k=1}^{n} k^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2=\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$; d) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$;

e) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2=\frac{1}{3}n(4n^2-1)$; f) $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k^2=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$;

g) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$;

h) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$;

i) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{n}{2n+1}$; j) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{n}{n+1}$;

k) $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{3^k}=\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{4\cdot 3^n}$; l) $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1})$;

m) $\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$; n) $\sum_{k=1}^{n}\sin kx=\sin\frac{n}{2}x\sin\frac{n+1}{2}x/\sin\frac{x}{2}$.

11. Neka je $a+\frac{1}{a}$ cijeli broj. Dokazati da je broj $a^n+\frac{1}{a^n}$ za proizvoljno $n\in N$ takođe cijeli broj.

12. Dokazati nejednakost

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\leqq\frac{1}{\sqrt{3n+1}}\quad(n\in N).$$

13. Dokazati identitet

$$\prod_{r=2}^{n}\frac{r^3-1}{r^3+1}=\frac{2}{3}\,\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}.$$

14. Dokazati nejednakosti:

a) $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\geqq\sqrt{n}$; b) $(\forall a,b\in R^+)(n\in N,\ n\geqq 2)\left(\frac{a+b}{2}\right)^n\leqq\frac{a^n+n^n}{2}$;

c) $(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)\geqq 1+a_1+a_2+\ldots+a_n$ ako su $a_i\geqslant 0\vee a_i\in[-1,\ 0]$ za $i=\overline{1,\ n}$. (Specijalno, za $a_1=\ldots=a_n=x>-1$ dobijemo Bernulijevu* nejednakost:

$$(1+x)^n\geqslant 1+nx;$$

d) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>2$; e) $n!\leqq\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$; f) $|\sin nx|\leqq n|\sin x|$;

g) $(\forall x,y\in R^+)(\forall n\in N,\ n\geqslant 2)\sqrt{x^n}+\sqrt{y^n}\leqq\sqrt{(x+y)^n}$.

15. Dokazati djeljivosti:

a) $3\ |(5^n+2^{n+1}),\ n\in N_0$; b) $64\ |(3^{2n+3}+40n-27)\ n\in N_0$;

c) $133|(11^{n+2}+12^{2n+1}),\ n\in N_0$; d) $54\ |(2^{2n+1}-9n^2+3n-2),\ n\in N_0$.

16. Ako je p prost broj i $n\in N$, dokazati slijedeću kongruenciju (Fermat**)

$$n^p-n\equiv 0\pmod p.$$

17. Dokazati

$$(\forall a\in R)(\forall n\in N_0)\sum_{k=0}^{n}\binom{a+k}{k}=\binom{a+n+1}{n}.$$

18. Dokazati formule:

$$\binom{-1}{k}=(-1)^k;\quad\binom{-k}{n}=(-1)^n\binom{n+k-1}{n};$$

$$\binom{1/2}{k}=(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}=(-1)^k\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2},\ \text{gdje je}$$

$1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)=(2k-1)!!$,
$2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)=(2k)!!\ (k\in N)$.

19. Izračunati sume:

a) $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$; b) $\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}$;

c) $\sum_{k=0}^{n}(k+1)\binom{n}{k}$; d) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$; e) $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\ldots$.

20. Dokazati identitete:

a) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots-\frac{1}{n}=2\left(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+4}+\ldots+\frac{1}{2n}\right),\ n=2k$;

b) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+\frac{1}{n}=2\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n}\right),\ n=2k-1$,

gdje je $k\in N$.

---

* Jakob Bernoulli (1654 – 1705), švajcarski matematičar holandskog porijekla.

** Pierre de Fermat (1601 – 1665), francuski matematičar, po zanimanju pravnik, koji se matematikom bavio iz hobija.

RJEŠENJA

1. U skupu $Q: \overline{A} = \{x \mid x \in Q \wedge x > \sqrt{2}\}$,

$\underline{A} = \{x \mid x \in Q \wedge x \leqq \frac{1}{2}\}$, $\inf A = \frac{1}{2} = \min A$, $\sup A$ i $\max A$ ne postoje.

U skupu $R: \overline{A} = \{x \mid x \geqq \sqrt{2}\}$, $\underline{A} = \{x \mid x \leqq \frac{1}{2}\}$, $\inf A = \min A = \frac{1}{2}$, $\sup A = \sqrt{2}$, $\max A$ ne postoje.

2. Neka je $p \equiv x^3 + y^3 = 0$, $q \equiv x + y = 0$ $(x, y \in R)$.

Tada je $p' \equiv x^3 + y^3 \neq 0$, $q' \equiv x + y \neq 0$.

Prema tome,

$q' \equiv x + y \neq 0 \Rightarrow (x \neq -y) \Rightarrow (x^3 \neq -y^3) \Rightarrow (x^3 + y^3 \neq 0)$, tj. (1) $(q' \Rightarrow p') \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$,

što je i trebalo dokazati.

Formula (1) dokazana je u 1.1, zadatak 1.a).

3. a) Pretpostavimo suprotno, tj. da je $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ racionalan broj i da su p, q relativno prosti cijeli brojevi. Tada je $2 = p^2/q^2$, tj. $p^2 = 2q^2$. Odatle se vidi da je p djeljiv brojem 2, tj. $p = 2k$, $k \in N$. Na osnovu toga je $q^2 = 2k^2$, pa se zaključuje da je i q djeljivo brojem 2, što je protivno pretpostavci da su p i q relativno prosti brojevi. Dakle, $\sqrt{2} \notin Q$.

b) Pretpostavimo da je $\sqrt{2} + \sqrt{3} = r \in Q$. Tada je $(\sqrt{3})^2 = (r - \sqrt{2})^2$ ili $3 = r^2 - 2r\sqrt{2} + 2$, odnosno

$\sqrt{2} = \frac{r^2 - 1}{2r} \in Q$, što je nemoguće jer prema a) $\sqrt{2} \notin Q$.

c) Pretpostavka da je $3\sqrt{2} = r_1$ ili $2 + \sqrt{2} = r_2$, gdje su $r_1, r_2 \in Q$ povlači da je

$\sqrt{2} = \frac{r_1}{3}$ ili $\sqrt{2} = r_2 - 2$,

što je nemoguće, jer su $r_1/3$ ili $r_1 - 2$ racionalni brojevi. Prema tome, pretpostavka da su $3\sqrt{2}$ ili $2 + \sqrt{2}$ racionalni brojevi otpada, pošto nas je dovela do protivrječnosti $(\sqrt{2} \in Q)$.

4. Neka je $x = c_0, a_1 a_2 \ldots a_k \overline{b_1 b_2 \ldots b_p}$ beskonačan periodičan decimalni broj, gdje $a_i\,(i = \overline{1, k})$ i $b_j\,(j = \overline{1, p})$ predstavljaju cifre u decimalnom zapisu broja x. Sad je

$10^{k+p} x = c_0 a_1 a_2 \ldots a_k b_1 b_2 \ldots b_p, \overline{b_1 \ldots b_p}$

$10^k \quad x = c_0 a_1 a_2 \ldots a_k, \overline{b_1 \ldots b_p}$

tj.

$10^k (10^p - 1) x = c_0 a_1 \ldots a_k b_1 \ldots b_k - c_0 a_1 \ldots a_k$

ili

$$x = \frac{z}{10^k (10^p - 1)} \qquad (z \in Z).$$

a) 427/99, b) 2309/99, c) 19616/9900.

5. a) Karakteristične vrijednosti su $\left\{-1, \frac{3}{2}\right\}$:

$x + 1 \gtreqless 0 \Leftrightarrow x \gtreqless -1$,

$2x - 3 \gtreqless 0 \Leftrightarrow x \gtreqless \frac{3}{2}$.

Prema tome je:

x	$(-\infty, -1)$	$\left(-1, \frac{3}{2}\right)$	$\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$
$x+1$	$-$ 0	$+$	$+$
$2x-3$	$-$	$-$ 0	$+$
slučaj	1°	2°	3°

1° Za $x \in (-\infty, -1)$ jednačina glasi:

$-(x+1) + (2x-3) = 2 \Leftrightarrow x = 6 \notin (-\infty, -1)$, te otpada.

2° Za $x \in \left[-1, \frac{3}{2}\right)$ jednačina je $\Leftrightarrow$

$x + 1 + (2x - 3) = 2 \Leftrightarrow 3x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3} \in \left[-1, \frac{3}{2}\right)$,

te je $x = \frac{4}{3}$ rješenje jednačine.

3° Za $x \in \left[\frac{3}{2}, \infty\right)$ jednačina je $\Leftrightarrow$

$x + 1 - (2x - 3) = 2 \Leftrightarrow x = 2 \in \left[\frac{3}{2}, \infty\right)$.

Dakle,

$\{x \mid |x+1| - |2x-3| = 2\} = \left\{\frac{4}{3}, 2\right\}$.

b) Karakteristične tačke su $\{-2, 1/2\} = \{x \mid x + 2 = 0 \vee 2x - 1 = 0\}$. Tim tačkama se skup $R = (-\infty, -2) \cup [-2, 1/2) \cup [1/2, \infty)$ dijeli na tri disjunktna intervala, u kojima izrazi pod znakom modula mijenjaju znakove. Potražićemo rješenje date jednačine u svakom od tih intervala. Dobije se

$\{x \mid |x+2| - |2x-1| = 2,\ x \in R\} = \{1/3, 1\}$.

c) $\{x \in R \mid |x^2 - 4x + 3| - |x - 2| = x - 1\} = \{2 - \sqrt{2}, 2, 3 + \sqrt{3}\}$.

6. a) $||x+2|-1|\leqq 1 \Leftrightarrow -1\leqq |x+2|-1\leqq 1$

$$\Leftrightarrow 0\leqq |x+2|\leqq 2$$
$$\Leftrightarrow -2\leqq x+2\leqq 2$$
$$\Leftrightarrow -4\leqq x\leqq 0.$$

Dakle, $\{x\in R|\ ||x+2|-1|\leqq 1\}=[-4,0]$.

b) $\{x\in R|\ |x^2-2x-1|\leqq 2\}=[-1,3]$;

c) $\{x\in R|\ |x^2-x|-|x|<1\}=(-1,1+\sqrt{2})$.

7. a) $(\forall\varepsilon>0)\ |x-a|<\varepsilon\Leftrightarrow -\varepsilon<x-a<\varepsilon$

$$\Leftrightarrow a-\varepsilon<x<a+\varepsilon$$
$$\Leftrightarrow x\in \cup_\varepsilon(a);$$

b) 1° $a<x<b\Leftrightarrow A-\varepsilon<x<A+\varepsilon\wedge A+\varepsilon=b\wedge A-\varepsilon=a$

$$\Leftrightarrow |x-A|<\varepsilon\wedge A=\frac{1}{2}(a-b)\wedge\varepsilon=\frac{1}{2}(b-a)$$
$$\Leftrightarrow \left|x-\frac{1}{2}(a+b)\right|<\frac{1}{2}(b-a);$$

2° $x\notin(a,b)\Leftrightarrow x\in x\notin \underset{\frac{1}{2}(b-a)}{\cup}\left(\frac{1}{2}(a+b)\right)$

$$\Leftrightarrow \left|x-\frac{1}{2}(a+b)\right|\geqq\frac{1}{2}(b-a);$$

3° $-1\leqq x\leqq 0\Leftrightarrow \left|x-\frac{1}{2}(-1+0)\right|\leqq\frac{1}{2}(0+1)$

$$\Leftrightarrow \left|x+\frac{1}{2}\right|\leqq\frac{1}{2}.$$

9. Kako je:

a) $S_1=\sum_{k=1}^{1} aq^{k-1}=a=a\dfrac{1-q}{1-q}$, tj. $a=a$, formula je tačna za $n=1$.

b) Pretpostavimo da je formula tačna za neki prirodan broj n. Tada je

$$S_{n+1}=S_n+aq^n$$
$$=a\frac{1-q^n}{1-q}+aq^n \text{ (na osnovu induktivne pretpostavke)}$$
$$=a\frac{1-q^n+q^n-q^{n+1}}{1-q}$$
$$=a\frac{1-q^{n+1}}{1-q},$$

tj. formula je tačna za $n+1$ ako je tačna za n. Dakle, po principu indukcije, formula za S_n tačna je za sve prirodne brojeve.

10. Pri dokazivanju se možemo koristiti matematičkom indukcijom.

a) Kako je

1° $\sum_{k=1}^{1} k=1=\frac{1}{2}\cdot 1(1+1)$, tj. $1=1$,

formula je tačna za $n=1$.

2° Pretpostavimo li da je formula tačna za neki prirodan broj n, tada je za $n+1$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k=\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)+n+1$$
$$=\frac{1}{2}n(n+1)+n+1 \text{ (na osnovu induktivne pretpostavke)}$$
$$=\frac{1}{2}(n+1)(n+2),$$

tj. formula je tačna i za $n+1$ ako je tačna za n.

Na osnovu 1° i 2° formula a) je tačna po principu indukcije za sve $n\in N$.

l) 1° Za $n=1$ formula je identitet:

$a^1-b^1=(a-b)\cdot a^0$.

2° $a^{n+1}-b^{n+1}=a^{n+1}-a^nb+a^nb-b^{n+1}$

$=a^n(a-b)+b(a^n-b^n)$, odakle na osnovu induktivne pretpostavke

$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1})$,

slijedi

$$a^{n+1}-b^{n+1}=(a-b)[a^n+b(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1})]$$
$$=(a-b)(a^n+a^{n-1}b+\ldots+ab^{n-1}+b^n),$$

tj. formula vrijedi i za $n+1$.

Dakle, po principu matematičke indukcije data formula je tačna za sve $n\in N$.

m) 1° Za $n=1$: $\prod_{k=1}^{1}\cos\dfrac{x}{2^k}=\cos\dfrac{x}{2}=\dfrac{\sin x}{2\sin\frac{x}{2}}$, što je tačno, jer je $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$.

2° Pretpostavimo da je formula tačna za neki prirodan broj n. Tada je

$$\prod_{k=1}^{n+1}\cos\frac{x}{2^k}=\left(\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k}\right)\cdot\cos\frac{x}{2^{n+1}}$$
$$=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}\cdot\cos\frac{x}{2^{n+1}} \text{ (na osnovu induktivne pretpostavke)}$$
$$=\frac{\sin x}{2^{n+1}\sin\frac{x}{2^{n+1}}\cdot\cos\frac{x}{2^{n+1}}}\cdot\cos\frac{x}{2^{n+1}}=\frac{\sin x}{2^{n+1}\sin\frac{x}{2^{n+1}}},$$

tj. formula je tačna i za $n+1$. Dakle, tačna je za sve $n\in N$.

11. Zapišimo iskaz u slijedećoj formi:

$N(n)=a^n+1/a^n \in Z$ ako je $N(1)\in Z$.

Lako se provjerava identitet

(*) $N(n+1)\equiv N(1)N(n)-N(n-1),\ n>1,$

odakle slijedi da je $N(n+1)$ cio broj ako su $N(n-1)$ i $N(n)$ cijeli brojevi.

Sada je

$$N(2)=a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2\in Z.$$

Prema tome:

1° $N(1)$ i $N(2)$ su cijeli brojevi.

2° Iz (*) slijedi da je $N(n+1)$ cijeli broj ako su $N(n-1)$, $N(n)$ cijeli brojevi.

Na osnovu 1° i 2° slijedi da je $N(n)\in Z$ za svako $n\in N$ po principu matematičke indukcije.

12. Dokaz indukcijom:

1° Za $n=1: \frac{1}{2}\leqq\frac{1}{\sqrt{4}}$, tj. $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

nejednakost je tačna.

2° Induktivna pretpostavka

$$A(n)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\leqq\frac{1}{\sqrt{3n+1}}=B(n),\ n\geqslant 1$$

poslije množenja sa $\frac{2n+1}{2n+2}$ prelazi u

$$(*)\quad A(n+1)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2n+2}\leqq\frac{1}{\sqrt{3n+1}}\cdot\frac{2n+1}{2n+2}.$$

Ako je

$$(**)\quad \frac{1}{\sqrt{3n+1}}\cdot\frac{2n+1}{2n+2}\leqq\frac{1}{\sqrt{3(n+1)+1}}=B(n+1),$$

tada iz (*) i (**) slijedi da je

$A(n+1)\leqq B(n+1)$,

tj. nejednakost koju dokazujemo vrijedi i za $n+1$.

Nejednakost (**) je ekvivalentna sa

$\frac{1}{3n+1}\cdot\frac{(2n+1)^2}{(2n+2)^2}\leqq\frac{1}{3n+4}$, što je ekvivalentno sa

$12n^3+28n^2+19n+4\leqq 12n^3+28n^2+20n+4$

tj. $\Leftrightarrow 0<n$.

Time je nejednakost $A(n)\leqq B(n)$ dokazana.

14. a) Kako je za svako $0<k\leqq n$

$$\sqrt{k}\leqq\sqrt{n}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{k}}\geqq\frac{1}{\sqrt{n}}\quad (\text{„}=\text{“ za } k=n),$$

tj. $$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\geqq n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}=\sqrt{n},$$

što je i trebalo dokazati.

b) Dokaz izvesti indukcijom.

d) Direktna posljedica Bernulijeve nejednakosti za $x=\frac{1}{n}$.

e) Kako je

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^2-(n+1-k)k=\left(\frac{n+1}{2}-k\right)^2\geqq 0,\text{ to je } (\forall k=\overline{1,n})\,(n+1-k)k\leqq\left(\frac{n+1}{2}\right)^2.$$

Množenjem tih nejednakosti za $k=\overline{1,n}$ dobije se

$$n\cdot 1\cdot(n-1)\cdot 2\cdots 1\cdot n\leqq\left(\frac{n+1}{2}\right)^{2n},\text{ tj. } (n!)^2\leqq\left(\frac{n+1}{2}\right)^{2n},$$

što je i trebalo dokazati.

Primjedba: Sve nejednakosti dokazati i indukcijom.

f) 1° Za $n=1: |\sin 1x|\leqq 1|\sin x|$ je tačno;

2° Pošto je

$\sin(n+1)x=\sin nx\cos x+\cos nx\sin x$,

slijedi

$$\begin{aligned}|\sin(n+1)x|&\leqq|\sin nx|\,|\cos x|+|\cos nx|\,|\sin x|\\ &\leqq|\sin nx|+|\sin x|\ (\Leftarrow|\sin\alpha|\leqq 1,\ |\cos\alpha|\leqq 1)\\ &\leqq(n+1)|\sin x|,\end{aligned}$$

gdje se posljednja nejednakost dobije na osnovu induktivne pretpostavke da je data nejednakost tačna za neko $n\in N$.

g) Primijenimo indukciju.

1° Za $n=2$ nejednakost se svodi na identitet.

2° Sada je

$$\begin{aligned}\sqrt{x^{n+1}}+\sqrt{y^{n+1}}&=\sqrt{x^n}\sqrt{x}+\sqrt{y^n}\sqrt{y}\\ &<\sqrt{x^n}\sqrt{x+y}+\sqrt{y^n}\sqrt{x+y}\quad (\Leftarrow x,\ y>0)\\ &=(\sqrt{x^n}+\sqrt{y^n})\sqrt{x+y}\\ &\leqq\sqrt{(x+y)^n}\sqrt{x+y}\quad (\text{induktivna pretpostavka})\\ &=\sqrt{(x+y)^{n+1}}.\end{aligned}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $n=2$.

Primjedba: za $n=1$: $\sqrt{x}+\sqrt{y}>\sqrt{x+y}$ $(x,\ y>0)$.

15. a) Treba dokazati $3 \mid f(n)=5^n+2^{n+1}$, $n\in N_0$.

Kako je

$$f(n+1)\equiv 5^{n+1}+2^{n+2}+5^n+2^{n+1}-f(n)$$
$$\equiv 6\cdot 5^n+3\cdot 2^{n+1}-f(n),$$

to je $3 \mid f(n+1)$ ako je $3 \mid f(n)$. Kako je $f(0)=3$, to je $3 \mid f(n)$ po principu matematičke indukcije.

d) Ako je $f(n)=2^{2n+1}-9n^2+3n-2$, tada je $f(n+1)-f(n)=6(2^{2n}-3n-1)$.

Ako je $g(n)=2^{2n}-3n-1$, tada je $g(n+1)-g(n)=3(2^{2n}-1)$.

Ako je $h(n)=2^{2n}-1$, tada je $h(n+1)-h(n)=3\cdot 2^{n}$.

1° Kako je $3 \mid h(1)=3$ i $3 \mid h(n+1)$ ako je $3 \mid h(n)$, to je $3 \mid h(n)$ za $n\in N$.

2° Kako je $9 \mid g(1)(=0)$ i $9 \mid g(n+1)$ ako je $9 \mid g(n)$, to je $9 \mid g(n)$ za $n\in N$.

3° Budući da je $54 \mid f(1)=0$ i $54 \mid f(n+1)$, ako je $54 \mid f(n)$, slijedi $54 \mid f(n)$ za $n\in N$.

Osim toga, $54 \mid f(0)=0$.

Dokaz je moguće izvesti i na drugi način, npr. primjenom binomne formule:

a) $5^n=(2\cdot 3-1)^n=3q+(-1)^n$, $(q\in N_0)$

$2^{n+1}=(3-1)^{n+1}=3s+(-1)^{n+1}$, $(s\in N)\Rightarrow 5^n+2^{n+1}=3(q+s)$, što je i trebalo dokazati.

16. Za $N=1$ kongruencija je tačna. Pretpostavimo da je formula tačna za neko $n\in N$. Pođemo li sad od jednakosti

$$(*)\quad (n+1)^p=n^p+\binom{p}{1}n^{p-1}+\ldots+\binom{p}{p-1}n+1.$$

Binomni koeficijenti $\binom{p}{k}$ $(k=\overline{1,\ p-1})$ djeljivi su sa p (ako je p prost broj), pa dobijemo kongruenciju (iz $(*)$)

$$(n+1)^p\equiv n^p+1 \pmod p.$$

Odavde slijedi:

$$(n+1)^p-(n+1)\equiv n^p-n \pmod p,$$

tj. kongruencija vrijedi i za $n+1$ ako vrijedi za neko n.
Prema tome, kongruencija je dokazana metodom matematičke indukcije.

17. Poći od Paskalove formule

$$\binom{a+n+1}{n}+\binom{a+n+1}{n+1}=\binom{a+n+2}{n+1}$$ i primijeniti princip indukcije.

19. a) Iz $(1+x)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$ za $x=1$ izlazi $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$.

b) Kako je $k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$, slijedi:

$$\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}=n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}=n\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n}{i}=n2^{n-1},\ (\Leftarrow \text{iz a})).$$

c) $$\sum_{k=0}^{n}(k+1)\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=n2^{n-1}+2^n=2^{n-1}(n+2).$$

d) Iz $(1+x)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$ za $x=-1$ slijedi $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0$.

e) Iz a) i d) slijedi

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}+\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=2^n,\ \text{tj.}$$

$$2\left(\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\ldots\right)=2^n \text{ ili } \binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\ldots=2^{n-1}.$$

Slično:

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\ldots=2^{n-1}.$$

20. Stavimo li $n=2k-1$, posmatrani identitet se svodi na

$$u_k\equiv\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\ldots+\frac{1}{2k-1}=1-\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2k-1}\equiv v_k.$$

Odavde je

$$(*)\quad u_{k+1}-u_k=\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{k}=\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k},$$

$$(**)\quad v_{k+1}-v_k=\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k}.$$

Ako se pretpostavi da je $u_k=v_k$ iz $(*)$ i $(**)$ slijedi $u_{k+1}=v_{k+1}$. Kako je $u_1=v_1$, dokaz indukcijom je završen za n neparno.
Slično provesti dokaz za n parno, tj. $n=2k$.